

---

## Einleitung

Für viele Lernende und auch für manche Lehrende gilt die Beschäftigung mit der Bruchrechnung in Form der Brüche, aber auch der Dezimalbrüche als schwieriges und herausforderndes Gebiet. Wegen des erstmals höheren Abstraktionsgrades passiert es hier durchaus nicht selten, dass bei Lernenden erstmalig das mathematische Verständnis weitgehend auf der Strecke bleibt und an seine Stelle das blinde Auswendiglernen unverstandener und darum leicht zu verwechselnder Regeln tritt. Dies zu verhindern und die Bruchrechnung als faszinierendes und wichtiges Gebiet des Mathematikunterrichts darzustellen, das für alle Lernenden verständlich bleiben kann, ist das zentrale Ziel dieses Buches. Unsere Zielgruppe sind Studierende für das Lehramt der Primarstufe und der Sekundarstufen, Lehramtsanwärterinnen und Lehramtsanwärter mit dem Fach Mathematik sowie praktizierende Lehrerinnen und Lehrer. Unser Buch kann auch für Eltern, Schulbuch- und Lehrplangestalter und alle, die sich für das Thema Bruchrechnung aus persönlichen, unterrichtlichen, empirischen oder theoretischen Gründen interessieren, hilfreich sein.

Die *Didaktik der Bruchrechnung* ist seit fast vier Jahrzehnten auf dem Markt und entwickelte sich sehr rasch zum Standardwerk. Das Buch wurde bislang vier Mal sehr stark überarbeitet, schrittweise erweitert, an die aktuellen Curricula angepasst und auf den neuesten Forschungsstand gebracht. Auch die vorliegende fünfte Auflage stellt wiederum eine gründliche Aktualisierung und Überarbeitung dar. Diese Neuauflage wurde erstmalig von einem Autorenteam geschrieben: Friedhelm Padberg (Universität Bielefeld) ist für die grundlegende Überarbeitung des Teils zu den Brüchen, Sebastian Wartha (Pädagogische Hochschule Karlsruhe) für den Teil zu den Dezimalbrüchen verantwortlich.

Schon bei der vierten Auflage wurden die zentralen Grundvorstellungen der Bruchrechnung sowie die prozessbezogenen mathematischen Kompetenzen im Sinne der Lehrpläne und Bildungsstandards thematisiert. In dieser Neuauflage wird diese Prozessorientierung noch deutlich stärker expliziert. Der Erwerb mathematischer Inhalte bei der Erarbeitung der Leitidee Zahl, speziell Bruchzahl, lässt sich nämlich ideal verknüpfen mit der Ausbildung der prozessbezogenen Kompetenzen des Argumentierens und Begründens, des Kommunizierens und Reflektierens (z. B. beim Auffinden von Lösungswegen sowie im Zusammenhang mit möglichen Problembereichen und Lernhürden). Gleichzeitig ist für das Lösen vielseitiger mathematischer Probleme in der Bruchrechnung die Verwendung verschiedener mathematischer Darstellungen und Symbole erforderlich. In diesem Band

werden daher zahlreiche konstruktive Vorschläge gemacht, wie die Lernenden die Bruchzahlen und das Rechnen mit diesen prozessorientiert lernen können.

In diesem Zusammenhang greifen wir auf zahlreiche, genauer auf mehr als 100 gelungene Aufgaben und Lernsituationen aus einer Vielzahl neuester Schulbücher zurück – erstmalig nicht mehr in Schwarz-Weiß, sondern in Farbe. Viele dieser Beispiele bieten auch gute Ansätze für eine inhaltliche Differenzierung bei leistungsheterogenen Lerngruppen.

Unser Band beginnt mit einem knappen Grundlagenteil über Verständnis und Grundvorstellungen sowie die Bedeutung der Prozessorientierung im heutigen Mathematikunterricht. Die für diesen Band grundlegende Frage, ob die Bruchrechnung heute im Mathematikunterricht überhaupt noch thematisiert werden sollte – sei es in Form der Brüche (wird häufiger verneint), sei es in Form der Dezimalbrüche (hier herrscht allgemeiner Konsens) –, wird im zweiten Kapitel differenziert beantwortet. Im dritten Kapitel beschäftigen wir uns gründlich und facettenreich mit der Einführung der Brüche. Im Mittelpunkt stehen hier die zentralen Grundvorstellungen, Schreibweisen und Repräsentanten sowie Unterschiede zwischen Bruchzahlen und natürlichen Zahlen.

Die folgenden fünf Kapitel zum Erweitern/Kürzen, Größenvergleich, Addieren/Subtrahieren, Multiplizieren und Dividieren von Brüchen sind jeweils weithin gleich aufgebaut: Ausgehend von – empirisch belegten – anschaulichen Vorkenntnissen werden jeweils anschließend Grundvorstellungen und anschauliche Zugangswege (ohne jede Regelformulierung) thematisiert, an die sich Hinweise zur zeitlich deutlich später folgenden, systematischen Behandlung (einschließlich Regelformulierung) anschließen. Auch der heutige Mathematikunterricht kann seine Ziele nicht ohne ein variationsreiches Üben erreichen – wenn auch gelegentlich das Gegenteil suggeriert wird. Hier wie auch schon bei der Thematisierung der anschaulichen und systematischen Zugangswege ist die Kenntnis empirisch belegter Problembereiche und Lernhürden zentral wie auch die Kenntnis geeigneter Maßnahmen zur Prävention und Intervention. Ein Abschnitt zur Vertiefung mit weiterleitenden Fragestellungen für besonders interessierte Lernende und Lehrende schließt jedes Kapitel ab. Der Abschnitt zu den Brüchen endet mit einem gründlichen Vergleich der Brüche und natürlichen Zahlen (Kap. 9) sowie mit einem zusammenfassenden Resümee (Kap. 10). Ergänzend finden sich Hinweise zu diagnostischen Tests am Ende dieses Bandes. Der komplette Teil über die Brüche wurde gewohnt zuverlässig und gut von Frau Anita Kollwitz geschrieben, bei der wir uns hierfür herzlich bedanken.

Im zweiten Teil des Buches werden Grundvorstellungen zu Dezimalbrüchen und das Rechnen mit ihnen diskutiert. Den Ausführungen gehen kurze Betrachtungen zur Bedeutung der Prozessorientierung (Kap. 11) und der Rolle von geeigneten Arbeitsmitteln (Kap. 12) in Bezug auf Dezimalbrüche voraus. Die einzelnen Kapitel zu den Zahlvorstellungen (Kap. 13 und 14), dem Erweitern und Kürzen (Kap. 15), dem Größenvergleich (Kap. 16), dem Zusammenhang zwischen Bruch- und Dezimalschreibweise (Kap. 17) sowie zu den vier Grundrechenarten (Kap. 18 bis 20) sind gleich strukturiert: In jedem Kapitel werden zunächst Grundvorstellungen „von der Mathematik aus betrachtet“ und anschauliche Zugänge zum Inhalt diskutiert. Darauf bezogen sind anschließend mögli-

che Schwierigkeiten von Lernenden sowie Daten aus empirischen Studien dargestellt, die aufzeigen, mit welchen Problemen tatsächlich gerechnet werden kann. Auf dieser Grundlage werden mögliche Aufgabenstellungen für die Diagnose dieser Lernhürden formuliert und Hinweise für Lern- und Übungsformate zu deren Überwindung gegeben. Diese sind häufig mit Beispielen aus aktuellen Lehrwerken illustriert. Ein Abschnitt über weiterleitende und vertiefende Fragestellungen für besonders interessierte Lernende und Lehrende schließt jedes Kapitel ab.

Als besonders anspruchsvolle Kompetenz wird ein „ungenaueres Arbeiten“ mittels Schätzen und Überschlagen mit Dezimalbrüchen angesehen, da es über Rechenfertigkeiten hinaus auch flexible Grundvorstellungen zu den Dezimalbrüchen und den Operationen mit ihnen voraussetzt. Daher wird dieses Thema erst gegen Ende des Buches in Kap. 21 diskutiert. Ein abschließendes Kap. 22 zieht ein Resümee aus den Darstellungen und schlägt Konsequenzen für die unterrichtliche Umsetzung vor. Bedanken möchten wir uns bei Stefan Walzer und Josias Hörhold für ihre hervorragende technische Unterstützung und für die inhaltlichen Rückmeldungen von Anna Schill, Marion Selg und Dr. Axel Schulz.

Zum Schluss noch eine persönliche Anmerkung: Die Zusammenarbeit zwischen uns Autoren war – u. a. wegen des Unterschieds im Lebensalter und des damit verbundenen unterschiedlichen Erfahrungshintergrunds – nie langweilig, sondern stets äußerst interessant, kontrovers, konstruktiv und immer fruchtbar. Anfängliche inhaltliche Differenzen und hieraus resultierende ausgiebige Diskussionen, die schließlich zu einem großen gemeinsamen Nenner in unserer Darstellung führten, zeigten uns deutlich, dass die Bruchrechnung in Form der Brüche und der Dezimalbrüche keineswegs ein uninteressantes, in allen Facetten bereits erforschtes Gebiet ist, sondern nach wie vor spannend, aktuell und voller offener Fragen. Die Bruchrechnung ist es also unbedingt wert, sich mit ihr ausgiebig zu befassen.