
Inhaltsverzeichnis

1	Zahlen, Operationen und Strategien „verstehen“ – einige Grundlagen . . .	1
1.1	„Verstehen“ und Grundvorstellungen	1
1.2	Verstehen untersuchen	2
1.3	Aufbau von Grundvorstellungen	3
1.4	Überwinden von Grundvorstellungsumbrüchen	4
1.5	Bedeutung der Prozessorientierung	5
2	Ist die Bruchrechnung heute noch nötig?	7
2.1	Die Bruchrechnung ist überflüssig – einige häufiger genannte Argumente	7
2.2	Die Bruchrechnung ist keineswegs überflüssig – einige ausgewählte Argumente	8
2.2.1	Anschauliche Fundierung des Dezimalbruchbegriffs mittels Brüchen	9
2.2.2	Einsichtige Fundierung des Rechnens mit Dezimalbrüchen mittels Brüchen	10
2.2.3	Prävention und Intervention bei Problembereichen der Dezimalbruchrechnung mittels Brüchen	10
2.2.4	Leichtere Begründung algebraischer Eigenschaften von \mathbb{Q}^+ mittels Brüchen	11
2.2.5	Wahrscheinlichkeitsrechnung	12
2.2.6	Gleichungslehre	14
2.2.7	Algebra	15
2.2.8	Reichhaltige und vielseitige Möglichkeiten zur Prozessorientierung	16
2.3	Resümee	16
3	Zur Einführung von Brüchen	17
3.1	Zentrale Grundvorstellungen	17
3.1.1	Einige Verwendungssituationen von Brüchen	17
3.1.2	Zwei zentrale Grundvorstellungen	21
3.1.3	Alternative Zugänge	22

3.2	Bruch als Anteil – zwei Teilaspekte	24
3.2.1	Teilaspekt 1 – Anteil eines Ganzen	24
3.2.2	Teilaspekt 2 – Anteil mehrerer Ganzer	28
3.3	Bruch als Anteil – zwei sachorientierte Bemerkungen	31
3.4	Schreibweisen und Repräsentanten	31
3.5	Bruchalbum und Stationenlernen – zwei innovative Ansätze	33
3.6	Drei Grundaufgaben	34
3.7	Anschauliche Vorkenntnisse zu Brüchen	36
3.8	Ein unterrichtlicher Zugang zu den Bruchzahlen	37
3.9	Unterschiede zwischen den natürlichen Zahlen und Bruchzahlen	38
4	Erweitern/Kürzen von Brüchen	41
4.1	Anschauliche Vorkenntnisse	41
4.2	Gleichwertige Brüche – anschauliche Zugangswege	43
4.3	Erweitern – systematische Behandlung	47
4.4	Kürzen – systematische Behandlung	48
4.5	Variationsreiches Üben	50
4.6	Mögliche Problembereiche und Hürden/ Prävention und Intervention	52
4.7	Vertiefung	54
5	Größenvergleich von Brüchen	55
5.1	Anschauliche Vorkenntnisse	55
5.2	Anschauliche Wege zum Größenvergleich	57
5.3	Systematische Behandlung	62
5.4	Variationsreiches Üben	63
5.5	Mögliche Problembereiche und Hürden	64
5.6	Prävention und Intervention	67
5.7	Vertiefung	70
6	Addition und Subtraktion von Brüchen	73
6.1	Anschauliche Vorkenntnisse	73
6.2	Grundvorstellungen und anschauliche Wege zur Addition und Subtraktion von Brüchen	74
6.3	Addition und Subtraktion – systematische Behandlung	78
6.4	Gemischte Zahlen	79
6.5	Variationsreiches Üben	80
6.6	Mögliche Problembereiche und Hürden	82
6.6.1	Grundvorstellungen und Rechenkalkül	83
6.6.2	Anschauliche Vorstellungen – oft Fehlannonce	84
6.6.3	Schwierigkeitsfaktoren	85
6.6.4	Abfolge im Schwierigkeitsgrad – ein Überblick	86

6.6.5	Bruch plus Bruch/Bruch minus Bruch	87
6.6.6	Kombinierter Fall (Bruch und natürliche Zahl)	90
6.7	Prävention und Intervention	91
6.8	Vertiefung	94
7	Multiplikation von Brüchen	99
7.1	Anschauliche Vorkenntnisse	100
7.2	Anschauliche Wege zur Multiplikation	101
7.3	Natürliche Zahl mal Bruch – Grundvorstellung und systematische Behandlung	105
7.4	Bruch mal natürliche Zahl – Grundvorstellung und systematische Behandlung	106
7.5	Bruch mal Bruch – Grundvorstellungen und systematische Behandlung	108
7.5.1	Grundvorstellung: Anteil vom Anteil	108
7.5.2	Grundvorstellung: Flächeninhalt	110
7.5.3	Vergleich beider Wege	111
7.6	Variationsreiches Üben	112
7.7	Mögliche Problembereiche und Hürden	114
7.7.1	Multiplizieren vergrößert immer	114
7.7.2	Abfolge im Schwierigkeitsgrad – ein Überblick	115
7.7.3	Multiplikation gleichnamiger Brüche	116
7.7.4	Multiplikation ungleichnamiger Brüche	117
7.7.5	Natürliche Zahl mal Bruch/Bruch mal natürliche Zahl	117
7.7.6	Multiplikation gemischter Zahlen	118
7.7.7	Regelformulierung und Begründung	119
7.8	Prävention und Intervention	120
7.9	Vertiefung	121
8	Division von Brüchen	125
8.1	Anschauliche Vorkenntnisse	125
8.2	Anschauliche Wege zur Division	128
8.3	Bruch durch natürliche Zahl – Grundvorstellung und systematische Behandlung	133
8.4	Bruch durch Bruch/Natürliche Zahl durch Bruch – Grundvorstellungen und systematische Behandlung	134
8.4.1	Grundvorstellung Messen	134
8.4.2	Grundvorstellung Umkehroperation	135
8.4.3	Vergleich der beiden Wege	137
8.5	Natürliche Zahl durch natürliche Zahl	138
8.6	Variationsreiches Üben	139

8.7	Mögliche Problembereiche und Hürden	140
8.7.1	Abfolge im Schwierigkeitsgrad – ein Überblick	140
8.7.2	Bruch durch Bruch	141
8.7.3	Bruch durch natürliche Zahl/Natürliche Zahl durch Bruch . . .	142
8.7.4	Natürliche Zahl durch natürliche Zahl	143
8.7.5	Grundvorstellungsumbrüche bei der Division	143
8.7.6	Division von Brüchen und praktische Anwendungen	144
8.7.7	Regelformulierung und Begründung	145
8.8	Prävention und Intervention	146
8.9	Vertiefung	148
9	Brüche und natürliche Zahlen – viele Gemeinsamkeiten, aber auch starke Umbrüche in den Grundvorstellungen	151
10	Resümee Brüche	155
10.1	Vorkenntnisse über Brüche überraschend gering	155
10.2	Gründliche Fundierung des Bruchbegriffs erforderlich	155
10.3	Grundvorstellungen sorgfältig erarbeiten	156
10.4	Mögliche Problembereiche und Hürden geschickt thematisieren	158
10.5	Variationsreiches Üben und Vertiefen	159
11	Prozessorientierter Zugang zu Dezimalbrüchen	161
11.1	Zur Bedeutung von Dezimalbrüchen	161
11.2	Vorteile der Schreibweise als Dezimalbruch	162
11.3	Zielsetzung des Dezimalbruchlehrgangs	163
11.4	Bedeutung der Prozessorientierung und Vernetzung	164
11.5	Grundvorstellungen aufbauen	165
11.6	Überwinden von Grundvorstellungsumbrüchen	166
12	Veranschaulichungen zu Dezimalbrüchen	167
12.1	Rolle von Anschauungsmitteln	167
12.2	Kriterien zur Auswahl von Arbeitsmitteln	168
12.3	Konkrete Arbeitsmittel für Dezimalbrüche	169
12.3.1	Zehnersystemblöcke/Dienes-Material	169
12.3.2	Lineare Arithmetikblöcke	169
12.3.3	Decimats	170
12.3.4	Millimeterpapierquadrate	170
12.3.5	Stellenwerttafeln	171
12.3.6	Zahlengerade	171
12.4	Arbeitsmittel sind nicht selbsterklärend	172
12.5	Vom konkreten Material zur Grundvorstellung	173
12.6	Übersetzen in Sachsituationen	174

13	Erweiterung des Stellenwertsystems	177
13.1	Stellenwerte und deren Zusammenhänge	177
13.2	Mögliche Problembereiche und Hürden	179
13.3	Vorbeugen, Diagnostizieren und Fördern	180
14	Darstellen, Lesen und Schreiben von Dezimalbrüchen	181
14.1	Brüche in Stellenwertschreibweise darstellen	181
14.2	Schreib- und Sprechweisen	182
14.3	Mögliche Problembereiche und Hürden	183
14.3.1	Probleme beim Übersetzen in eine nichtsymbologische Darstellung	183
14.3.2	Probleme beim Lesen und Schreiben	184
14.4	Vorbeugen, Diagnostizieren und Fördern	186
14.5	Variationsreiches Üben und Vertiefen	187
15	Erweitern und Kürzen bei Dezimalbrüchen	191
15.1	Verfeinern und Vergrößern einer Unterteilung	191
15.2	Vorbeugen, Diagnostizieren und Fördern	192
16	Größenvergleich und Anordnung bei Dezimalbrüchen	195
16.1	Wege zum Größenvergleich	195
16.1.1	Über die Stellenwerte an flächigen Veranschaulichungen	195
16.1.2	Über die Zahlengerade	196
16.1.3	Über Größen	196
16.1.4	Über Stellenwerttafeln	196
16.1.5	Beispiel	196
16.1.6	Vergleich der verschiedenen Wege	196
16.2	Anordnung von Dezimalbrüchen	198
16.3	Mögliche Problembereiche und Hürden	198
16.3.1	Probleme beim Vergleichen von Dezimalbrüchen	198
16.3.2	Probleme bei der Anordnung von Dezimalbrüchen	201
16.4	Vorbeugen, Diagnostizieren und Fördern	201
16.5	Variationsreiches Üben und Vertiefen	203
17	Zusammenhang zwischen Brüchen und Dezimalbrüchen	207
17.1	Umwandlung von Bruch- in Dezimalbruchschreibweise	207
17.2	Umwandlung von Dezimalbruch- in Bruchschreibweise	210
17.3	Mögliche Problembereiche und Hürden	211
17.4	Typische Fehlerstrategien bei der Umwandlung zwischen Dezimalbruch- und Bruchschreibweise	212
17.5	Vorbeugen, Diagnostizieren und Fördern	213

18	Addition und Subtraktion von Dezimalbrüchen	215
18.1	Grundvorstellungen zur Addition und Subtraktion	215
18.2	Rechenstrategien und -methoden zur Addition und Subtraktion	216
18.3	Operative Additions- und Subtraktionsstrategien	217
18.4	Stellenweises Rechnen und schriftlicher Algorithmus	218
18.5	Weitere Strategien	220
18.5.1	Rechnen im kleinsten Stellenwert	220
18.5.2	Zehnerbrüche	221
18.5.3	Größen	221
18.6	Zusammenfassung und Bewertung	222
18.7	Lösungsquoten und -wege	223
18.8	Mögliche Problembereiche und Hürden	224
18.8.1	Stellenwertprobleme	224
18.8.2	Komma-trennt-Strategie	225
18.9	Vorbeugen, Diagnostizieren und Fördern	227
18.10	Variationsreiches Üben und Vertiefen	228
19	Multiplikation von Dezimalbrüchen	231
19.1	Grundvorstellungen zur Multiplikation	231
19.2	Multiplizieren von Stellenwerten	234
19.2.1	Multiplikation mit Zehnerpotenzen	234
19.2.2	Multiplikation mit Stellenwerten kleiner 1	235
19.3	Strategien zur Berechnung von Multiplikationstermen	236
19.3.1	Nutzen des Flächeninhalts am Rechteckmodell	236
19.3.2	Malkreuz	237
19.3.3	Größen	237
19.3.4	Rechnen mit Zehnerbrüchen	239
19.3.5	Rechnen mit kleinsten Stellenwerten	239
19.3.6	Regel zur Multiplikation von Dezimalbrüchen	239
19.3.7	Sonderfall: Multiplikation mit natürlichen Zahlen	240
19.4	Mögliche Problembereiche und Hürden	240
19.4.1	Gering ausgeprägte Grundvorstellungen	240
19.4.2	Fehlvorstellungen	241
19.4.3	Probleme bei Rechenstrategien	242
19.5	Vorbeugen, Diagnostizieren und Fördern	245
19.5.1	Diagnostische Aufgaben und Beobachtungsschwerpunkte	245
19.5.2	Fördervorschläge: Grundvorstellung und Grundvorstellungsumbruch Multiplikation	246
19.5.3	Fördervorschläge: Rechenstrategien	247
19.6	Variationsreiches Üben und Vertiefen	248

20	Division von Dezimalbrüchen	251
20.1	Grundvorstellungen zur Division	251
20.2	Strategien zur Division durch Dezimalbrüche	252
20.2.1	Anschauliche Division am Modell	252
20.2.2	Division über Zehnerbrüche	253
20.2.3	Rückgriff auf Größen	253
20.2.4	Umkehroperation	254
20.2.5	Gleichsinniges Verändern	254
20.3	Sonderfall: Division durch Zehnerpotenzen	256
20.4	Sonderfall: Divisionsstrategien Dezimalbruch geteilt durch natürliche Zahl	257
20.5	Mögliche Problembereiche und Hürden	258
20.5.1	Fehlende Grundvorstellungen	258
20.5.2	Fehlerstrategien	259
20.6	Vorbeugen, Diagnostizieren und Fördern	263
20.6.1	Diagnostische Aufgaben	263
20.6.2	Fördervorschläge	263
20.7	Variationsreiches Üben und Vertiefen	264
20.7.1	Wahl der Rechenoperation	264
20.7.2	Divisionsstrategien	265
21	Runden, Überschlagen und Schätzen	269
21.1	Runden	270
21.2	Überschlagen von Rechenausdrücken	271
21.3	Schätzen von Zahlen und Größen	272
21.4	Mögliche Problembereiche und Hürden	273
21.5	Vorbeugen, Diagnostizieren und Fördern	274
21.6	Variationsreiches Üben und Vertiefen	275
22	Resümee und Konsequenzen	277
22.1	Zielsetzung: Verstehen und Prozesse	277
22.2	Modelle: Tragfähigkeit statt Vielfalt	278
22.3	Inhalte: Zahlen statt Ziffern	279
22.4	Zahlvorstellungen im Stellenwertsystem	279
22.5	Vorwissen aufgreifen, gegenüberstellen, Umbrüche vollziehen	280
22.6	Probleme bei mangelnden Grundvorstellungen	281
22.7	Fehlerstrategien beim syntaktischen Arbeiten	281
22.8	Fehlvorstellungen	282
22.9	Diagnose: Erfassung von Prozessen	283

22.10 Förderung und Förderkonzepte	283
22.10.1 Aktivieren von Grundvorstellungen	283
22.10.2 Überwinden von Fehlvorstellungen	284
22.10.3 Fehlerstrategien erkennen und überwinden	285
22.11 Vernetzung: eine Herausforderung	286
Diagnostische Tests	289
Zitierte Literatur	291
Zitierte Schulbücher	305
Vertiefende Literatur	307
Bisher erschienene Bände der Reihe Mathematik Primarstufe und Sekundarstufe I + II	315